

## EXERCISE ONE

作业3/20课堂交。上机作业交电子版3/24前到邮箱。带\*\*\*部分题本科生选做，研究生必做。

- 记 $L^2([0, 2\pi])$ 为实的平方可积函数，给出其内积的定义，说明其是一个Hilbert空间(给出其正交基和\*\*\*说明完备性)；  
\*\*\*如果记 $\hat{L}^2([0, 2\pi])$ 为复值的平方可积函数，定义复积并说明其是一个Hilbert空间。  
特别以上两个空间有什么关系？(提示：正交基存在对应关系)
- 设 $f(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$ ，计算其生成的周期为2的奇方波 $f_o$ 和偶方波 $f_e$ 的傅立叶级数；  
计算两个方波的能量 ( $L_2$ 范数)和其傅立叶系数的能量 ( $l_2$ 范数)。
- 写出高斯函数表达式，说明其属于Schwartz空间，计算其傅立叶变换。
- 证明：傅立叶变换的对偶性：即 $F = \hat{f}, \hat{F} = 2\pi f(-t)$ 。计算 $\frac{\sin x}{x}$ 的傅立叶变换。
- 设随机信号 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) + v(n)$ ，其中 $A$ 是正常数， $\phi$ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布随机变量，每个 $v(n)$ 服从独立的高斯分布 $N(0, \sigma^2)$ 且与 $\phi$ 相互独立；
  - 求 $x(n)$ 的均值，方差；
  - 计算其自相关系数，说明它是平稳信号。
  - 计算其频率谱和功率谱。

\*\*\*对随机信号 $x(n) = A \cos(\omega n + \phi)$ ，其中 $\phi$ 是 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布的随机变量， $A$ 是均值为零，方差为 $\sigma^2$ 的正态分布。同上计算。
- 利用任意LTI系统是卷积系统，即 $H(x(t)) = h(t) * x(t)$ 。  
证明：(1) 如果单位响应信号满足 $h(t) = 0, t \leq 0$ (称为因果信号)，则系统是因果系统。  
(2) 如果单位响应信号满足 $\int |h(t)| < \infty$ ，则系统是BIBO稳定系统。(输入有界，输出有界)。
- \*\*\* 验证：指数函数 $e^{ist}$ 是任一卷积算子和平移算子( $T_a(x(t)) = x(t - a)$ )的特征向量。  
即任意 $h(t) * e^{ist} = \lambda_1(s)e^{ist}, T_a(e^{ist}) = \lambda_2(s)e^{ist}$ ，其中 $s$ 为固定参数， $t$ 为变量。
- \*\*\*给定微分方程 $u'' + a^2 u = f(t)$ ，已知当 $f(t) = \delta(t)$ 时，得到基本解 $G(t) = e^{-a|t|}/(2a)$ 。证明：给定任意函数 $f(t)$ 的解为 $G(t) * f(t)$ 。  
注：利用傅立叶变换。

## 上机作业MATLAB

每次作业要求上交一个README文件说明和若干M文件.

本科生上机作业可以1-4人一组; 研究生可以互相讨论但要求独立完成。

## 1. (信号的生成与运算)

A: 试生成以下信号位于 $[-10, 10]$ 上的一个4096个样本的序列(1)周期为2的偶方波 $G2$  (2)Matlab的Sinc波  $Sinc$

B: 给出两个序列的时间延迟为1的对应序列。注意: 不是 $y(n) = x(n - 1)$ 。

C: 计算(1)和(2)的卷积和乘积序列。

D: 画图表示以上信号; (A,B可以画在一个图中。)

## 2. (信号的频率表示)

A: 利用fft和fftshift得到上题中六个信号的傅立叶变换;

B: 画图表示以上信号的变换; 注意: 变换的谱是复数。

C: 画图验证延迟信号和原信号的频率关系;

D: 画图验证: 傅立叶变换的卷积公式(时域)

\*\*\*画图验证: 傅立叶逆变换的卷积公式(频域)

## 3. (真实信号的频谱分析)

学习MATLAB demo: xpsound.m, 学习信号的功率谱密度(PSD)和光谱图(Spectrogram)的定义, 观察其峰值或亮区域与信号的关系。

A: 利用randn()生成大小0.1的噪音加入第一题生成的方波和sinc波, 给出FFT, 周期谱图(PSD)和光谱图,

比较说明噪音的影响。

B: 自己录入声音生成WAV文件或找到一个wav文件; (请使用较短的时间序列), 读入信号 $x(n)$ ;

C: 给出wav信号的频率谱FFT, (功率谱密度)周期谱图(PSD)和光谱图(利用函数 periodogram(x), spectrogram(x)).

D: 上交wav文件及说明信号与图的关系;